DOI:10.13482/j.issn1001-7011.2008.05.009

第 25卷 第 5期 黑龙江大学自然科学学报 Vol.25 No.5
2008年 10月 JOURNAL OF NATURAL SCIENCE OF HEILONGJIANG UNIVERSITY October, 2008

一个包含 Smarandache LCM对偶函数的方程

王 妤
(西北大学 数学系, 西安 710127)

摘 要: 对任意正整数 n,定义两个Smarandache LCM函数的对偶函数 $SL^*(n)=\max\{k: k\in N, [1,2,\cdots,k]\mid n\}$ 和 $S^*(n)=\max\{m: m\in N, m!\mid n\}$. 用初等方法研究函数方程 $\sum_{d\mid n}SL^*(d)=\sum_{d\mid n}S^*(d)$ 的可解性,并获得了该方程的所有正整数解。

关键词: Smarandache LCM函数; 初等方法; 函数方程
中图分类号: O156.4 文献标志码: A 文章编号: 1001-7011(2008)05-0645-03

1 引言及结论

对任意正整数 n, Smarandache LCM函数的对偶函数 $SL^*(n)$ 定义为

$$SL^*(n)=\max\{k: k\in N, [1,2,\cdots,k]\mid n\},$$

由 $SL^*(n)$ 的定义容易推出,当 n 是奇数时, $SL^*(n)=1$; 当 n 为偶数时, $SL^*(n)\geqslant 2$.

现在定义另一个算术函数 $S^*(n)$ 如下:

$$S^*(n)=\max\{m: m\in N, m!\mid n\},$$

特别,当 n 是奇数时, $S^*(n)=1$.

关于 $SL^*(n)$ 和 $S^*(n)$ 的其它性质,许多学者也进行过研究,取得了一系列研究成果,见文献[1-6].

本文的主要目的是利用初等方法研究函数方程

$$\sum_{d\mid n}SL^*(d)=\sum_{d\mid n}S^*(d) \tag{1}$$

的可解性,并得了一个有趣的结论。

为叙述方便,设 A 表示方程(1)的所有的正整数解的集合,即 $A=\{n: \sum_{d\mid n}SL^*(d)=\sum_{d\mid n}S^*(d), n\in N\}$. 对任意实数 s,考虑 Dirichlet 级数 $f(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, 本文研究了 $f(s)$ 的收敛性,并证明了下面的:

定理 对任意实数 s,当 $s\leqslant 1$ 时 $f(s)$ 发散;当 $s>1$ 时 $f(s)$ 收敛,且有恒等式

$$f(s)=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{12^s}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta-函数。

注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ 及 $\zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}$, 于是在定理中取 $s=2$ 和 $s=4$, 立刻得到下面的:

推论 在前面记号下有

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{143}{864}\pi^2 \text{ 及 } \sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{20735}{1866240}\pi^4.$$

收稿日期: 2007-11-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介: 王 妤(1983-),女,硕士研究生,主要研究方向:数论, E-mail: 511wangyu@163.com

2　定理的证明

这一部分完成定理的证明。将 n 分为两种情况来讨论:

1)当 n 为奇数时,由 $SL^*(n)$ 和 $S^*(n)$ 的定义有 $\sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|n}1=\sum_{d|n}S^*(d)$,故 n 为奇数是方程的解;

2)当 n 为偶数时,为方便讨论,再将 n 进行分类:

(A)当 $n=2^{\alpha}(\alpha\geqslant 1)$ 时,由计算易知 $\sum_{d|n} SL^*(d)=1+2\alpha=\sum_{d|n}S^*(d)$,故 $n=2^{\alpha}$ 是方程的解;

(B) $n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,其中 $p_1<p_2\cdots<p_k$, $k\geqslant 1$.

对 $\sum_{d|n} SL^*(d)$ 而言,有

$$\sum_{d|n} SL^*(d)=\begin{cases}3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k), & p_1\geqslant 5;\\ (3+4\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k), & p_1=3.\end{cases}$$

同理对 $\sum_{d|n} S^*(d)$,有

$$\sum_{d|n} S^*(d)=\begin{cases}3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k), & p_1\geqslant 5;\\ (3+4\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k), & p_1=3.\end{cases}$$

故 $n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是方程的解。

(C) $n=2^{\alpha}p^{\alpha_1}$ 时,其中 $\alpha\geqslant 2$.

(a)当 $p=3$, $n=2^{\alpha}\cdot 3$ 时,此时

$$\sum_{d|n} SL^*(d)=\begin{cases}6\alpha+1, & \alpha_1=1;\\ 1+2\alpha+4\alpha\alpha_1, & \alpha_1\geqslant 2.\end{cases}$$

同理有

$$\sum_{d|n} S^*(d)=\begin{cases}5\alpha+2, & \alpha_1=1;\\ 1+2\alpha+3\alpha\alpha_1+\alpha_1, & \alpha_1\geqslant 2.\end{cases}$$

故 $n=2^{\alpha}3^{\alpha_1}$, $(\alpha\geqslant 2, \alpha_1\geqslant 1)$ 不是方程的解。

(b)当 $p\geqslant 5$, $\alpha_1\geqslant 1$, $n=2^{\alpha}\cdot p^{\alpha_1}$ 时,此时有 $\sum_{d|n} SL^*(d)=(1+2\alpha)(1+\alpha_1)$.

同理有 $\sum_{d|n} S^*(d)=(1+2\alpha)(1+\alpha_1)$.

故 $n=2^{\alpha}p^{\alpha_1}$, $(p\geqslant 5, \alpha\geqslant 2, \alpha_1\geqslant 1)$ 是方程的解。

(D) $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,其中 $\alpha\geqslant 2$, $\alpha_k\geqslant 1$, $k\geqslant 2$.

(a)当 $p_1\geqslant 5$ 时,由 $SL^*(n)$ 和 $S^*(n)$ 的定义知, $SL^*(d)=S^*(d)$,故 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是方程的解。

(b)当 $p_1=3$, $\alpha_1=1$ 时,设 $n=2^{\alpha}\cdot 3\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=2^{\alpha}\cdot 3\cdot n_1$,其中 $\alpha\geqslant 2$, $\alpha_k\geqslant 1$, $k\geqslant 2$,此时

$$\sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|n_1} SL^*(d)+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d|n_1} SL^*(2^i d)+\sum_{d|n_1} SL^*(6d)+\sum_{d|n_1} SL^*(3d)+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{d|n_1} SL^*(2^i\cdot 3d),$$

$$\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{d|n_1} S^*(d)+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d|n_1} S^*(2^i d)+\sum_{d|n_1} S^*(6d)+\sum_{d|n_1} S^*(3d)+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{d|n_1} S^*(2^i\cdot 3d).$$

由 $SL^*(n)$ 和 $S^*(n)$ 的定义知, $\alpha=2$ 时, $\sum_{d|n_1} SL^*(2^2\cdot 3d)\geqslant\sum_{d|n_1} S^*(2^2\cdot 3d)$.

$\alpha>2$ 时, $\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{d|n_1} SL^*(2^i\cdot 3d)\geqslant\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{d|n_1} SL^*(2^i\cdot 3d)$.

故 $n=2^{\alpha}\cdot 3\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $(\alpha\geqslant 2, \alpha_k\geqslant 1, k\geqslant 1)$ 不是方程的解。

同理可证 $\alpha_1\geqslant 2$ 时, $n=2^{\alpha}\cdot 3^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $(\alpha\geqslant 2, \alpha_1\geqslant 2, \alpha_k\geqslant 1, k\geqslant 2)$ 不是方程的解。

综上可知,方程(1)的解为:

(i) n 为奇数;

(ii)当 $3|n$ 时, $n=2\cdot 3^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_1<p_2\cdots<p_k$, $\alpha_1\geqslant 1$, $\alpha_i\geqslant 0$, $k\geqslant 0$ $(i=2,3,\cdots k)$;

(iii)当 $3\nmid n$ 时, $n=2^{\alpha}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_1<p_2\cdots<p_k$, $p_1\geqslant 5$, $\alpha\geqslant 1$, $\alpha_i\geqslant 0$, $k\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots k)$.

因此对任意实数 s, $f(s) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$, 故当 $s \leqslant 1$时, 由数项级数的性质知 $f(s)$发散; 又 $f(s) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, 故 $s > 1$时, 由数项级数的性质知 $f(s)$收敛, 且有

$$f(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\in A}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} + \sum_{\substack{n=1 \\ 6|n, 4\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{n=1 \\ 2|n, 3\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(12n)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(12n)^s} = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{12^s}\right)$$

其中 $\zeta(s)$为 Riemann zeta—函数。

于是完成了定理的证明。

致谢: 作者对导师张文鹏教授的细心指导表示衷心的感谢!

参考文献

[1] 闵嗣鹤, 严士键. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.

[2] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[3] Tian Chengliang. Two equations involving the Smarandache LCM dual function[J]. Scientia Magna, 2007, (2): 80－85.

[4] Le Maohua. A conjecture concerning the Smarandache dual function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 153－155.

[5] Liu Yanni, Pan Xiaowei. Two equations involving the Smarandache function and its solutions[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2006, 23(6): 857－858.

[6] 陈国慧. 一个包含 k次方幂函数的方程[J]. 西北大学学报, 2007, 37(5): 694－696

An equation involving the Smarandache LCM dual function

Wang Yu

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, dual functions of two Smarandache LCM function are defined by $SL^*(n) = \max\{k : k\in N, [1, 2, \cdots, k] \mid n\}$ and $S^*(n) = \max\{m : m\in N, m! \mid n\}$. By using the elementary method, the solvability of the equation $\sum_{d|n} SL*(d) = \sum_{d|n} S*(d)$ are studied, and all positive integer solutions of this equation are obtained.

Key words: Smarandache LCM function; elementary method; function equation

(上接第 **644**页)

Mean value of Cochrane sums over short intervals

Zhang Xiaobeng

(Department of Applied Mathematics and Applied Physics, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710121, China)

Abstract: As one application of character sums estimation, consider the Cochrane sums $C(h, k) = \sum_{h=1}^{k} \left(\left(\frac{\bar{a}}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{ah}{k}\right)\right)$. The mean value properties of one special kind of Cochrane sums over the short interval $\left[1, \frac{p}{8}\right]$ are presented by using the mean value theroems of the Dirichlet L－functions and orthogonality of character sums. An interesting asymptotic formula $\sum_{a<\frac{p}{8}} \sum_{b<\frac{p}{8}} C(a, b, p) = \frac{691}{16384} p^3 + O(p^{\frac{5}{2}+\varepsilon})$, where $p > 7$ is a prime, is also obtained.

Key words: Cochrane sums; short intervals; asymptotic formula